1. Números reales

Análisis de Variable Real

2014–2015

Índice

1. Sistemas numéricos

1.1. Números naturales. Principio de Inducción

¿Qué son los números naturales?

Los números $1, 2, 3, \dots$, reciben el nombre de *números naturales*. Con ellos se realizan dos operaciones: la *suma* de números naturales y el *producto* de números naturales, que dan como resultado otro número natural perfectamente definido. Para dos números naturales cualesquiera m y n, su suma suele representarse por $m + n$ y su producto por $m \cdot n$ o mn (si no hay lugar a confusión). Si denotamos con $\mathbb{N}$ el conjunto de todos los números naturales, podemos pensar en la suma y el producto como aplicaciones del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
+ \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\
(m, n) &\longmapsto m + n,
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\cdot \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\
(m, n) &\longmapsto m \cdot n.
\end{aligned}
$$

Propiedades algebraicas de los naturales

- Propiedad *asociativa* de la suma: $(m + n) + p = m + (n + p)$.
- Propiedad *conmutativa* de la suma: $m + n = n + m$.
- Propiedad *asociativa* del producto: $(mn)p = m(np)$.
- Propiedad *conmutativa* del producto: $mn = nm$.
- Elemento *neutro* (o *unidad*) del producto: Hay un número natural, que denotamos por 1, tal que $n \cdot 1 = n$, cualquiera que sea n.
- Propiedad *distributiva* del producto respecto de la suma: $m(n + p) = mn + mp$.

Orden de los naturales

Orden estricto

Definición 1.1. m es *estrictamente menor* (o simplemente *menor*) que n si $m \leqslant n$ y $m \neq n$. Lo denotamos $m < n$.

- Esto es lo mismo que decir que $n > m$, que se lee "n es *estrictamente mayor* (o simplemente *mayor*) que m."

Propiedades del orden

- Propiedad *reflexiva*: $m \leqslant m$.
- Propiedad *antisimétrica*: Si $m \leqslant n$ y $n \leqslant m$, entonces $m = n$.
- Propiedad *transitiva*: Si $m \leqslant n$ y $n \leqslant p$, entonces $m \leqslant p$.
- Propiedad de *orden total*: Siempre es $m \leqslant n$ o $n \leqslant m$.

Buena ordenación

Teorema 1.2 (Principio de Buena Ordenación)**.** *Todo conjunto no vacío de números naturales posee un elemento mínimo, es decir, dado $S \subset \mathbb{N}$ no vacío, existe un elemento n_0 en S tal que $n_0 \leqslant n$ para todo $n \in S$.*

Principio de Inducción Matemática

Teorema 1.3 (Principio de Inducción Matemática)**.** *Dado $S \subset \mathbb{N}$ tal que*

(I) $1 \in S$,

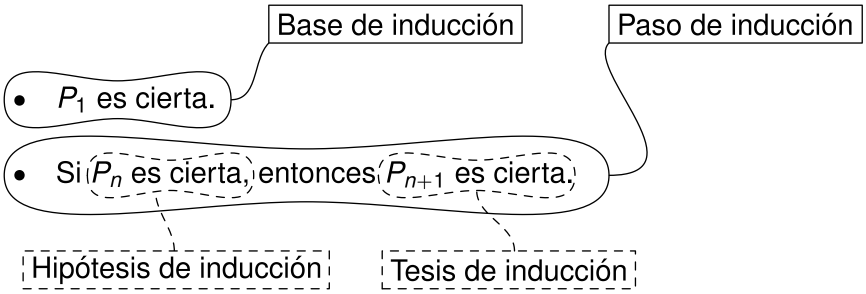
(II) $n + 1 \in S$, *siempre que* $n \in S$,

entonces $S = \mathbb{N}$.

Enunciado práctico del P. de Inducción Matemática

Teorema 1.4 (Principio de Inducción Matemática)**.** *Dada una propiedad P_n tal que*

Partes de una demostración por inducción



Principio de Inducción Completa

Teorema 1.5 (Principio de Inducción Completa)**.** *Dada una propiedad P_n tal que*

(I) P_1 *es cierta,*

(II) P_{n+1} *es cierta, siempre que* P_1, P_2, $\ldots$, P_n *son ciertas,*

entonces P_n *es cierta para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Axiomas de Peano

Axiomas 1.6 (Peano)**.**

(I) *Para todo número natural* n *existe otro número natural* n^+, *que se llama siguiente o sucesor de* n.

(II) *Existe un número natural, que denotamos por* 1, *tal que* $n^+ \neq 1$ *cualquiera que sea el número natural* n.

(III) *Cualesquiera que sean los números naturales* m *y* n, *es* $m^+ = n^+$ *si y solo si* $m = n$.

(IV) *Si un conjunto* S *de números naturales contiene a* 1 *y siempre que* $n \in S$ *también es* $n^+ \in S$, *entonces* $S = \mathbb{N}$.

1.2. Números enteros

Propiedades algebraicas de los enteros

Las propiedades de la suma y producto de los números naturales también las cumplen los números enteros. Cumplen además algunas propiedades adicionales:

- Elemento neutro (o *nulo*) de la suma: Hay un número entero, que denotamos por 0, tal que $n + 0 = n$ para cualquier entero n.
- Elemento *opuesto* para la suma: para cada entero n hay otro entero, que denotamos por $-n$, tal que $n + (-n) = 0$.

Propiedades del orden de los enteros

En cuanto al orden, además de las propiedades que cumplía el orden de los naturales, podemos añadir:

- Compatibilidad del *orden* con la *suma*: Si $m \leqslant n$, entonces $m + p \leqslant n + p$.
- Compatibilidad del *orden* con el *producto*: Si $m \leqslant n$ y $p \geqslant 0$, entonces $mp \leqslant np$.

Buena ordenación (*parcial*) para los enteros

Los números enteros no están bien ordenados, pero tienen una propiedades que a efectos prácticos es casi lo mismo.

Definición 1.7. Un conjunto $S \subset \mathbb{Z}$ no vacío se dice que está *acotado inferiormente* (resp. *superiormente*), si existe un entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que, para todo $n \in S$, es $k \leqslant n$ (resp. $k \geqslant n$).

Teorema 1.8 (Buena ordenación parcial de los enteros)**.** *Todo conjunto no vacío $S \subset \mathbb{Z}$ acotado inferiormente (resp. superiormente) tiene un elemento mínimo (resp. máximo), es decir, existe un elemento $n_0 \in S$ tal que $n_0 \leqslant n$ (resp. $n_0 \geqslant n$) para todo $n \in S$.*

Un principio de inducción

Teorema 1.9. *Sea $k \in \mathbb{Z}$. Si un conjunto $S \subset \mathbb{Z}$ cumple las dos condiciones siguientes:*

(I) $k \in S$, *y*

Enunciado práctico

Teorema 1.10. *Sea $k \in \mathbb{Z}$. Si una propiedad P_n es tal que*

(I) *P_k es cierta, y*

(II) *si P_n es cierta y $n \geqslant k$, entonces P_{n+1} es cierta,*

entonces P_n es cierta para todo entero $n \geqslant k$.

1.3. Números racionales

¿Qué son los números racionales?

En $\mathbb{Z}$ es posible la resta, pero no la división. Esta operación es posible (dividiendo por elementos distintos de 0) en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los *números racionales*, que son cocientes de números enteros (con denominador no nulo). En este conjunto están definidas la suma y el producto, y una relación de orden.

Propiedades algebraicas de los racionales

Las propiedades de la suma, el producto y el orden de los números enteros también las cumplen los números racionales. Cumplen además una propiedad adicional:

- Elemento *inverso* para el producto: Si $a \neq 0$, hay un número racional que denotamos por a^{-1} o $\frac{1}{a}$, tal que $aa^{-1} = 1$.

2. Los números reales

2.1. Operaciones algebraicas

El conjunto de los reales

Pasamos a considerar a continuación el conjunto $\mathbb{R}$ de los *números reales* o, más exactamente, las propiedades de $\mathbb{R}$ (sin entrar en su naturaleza: no decimos qué es un número real, sino cómo se manejan los números reales, fijando sus propiedades básicas como axiomas).

Propiedades algebraicas de los reales

(III) *Elemento neutro (o nulo) de la suma: hay un número real, denotado por* 0, *tal que* $a + 0 = a$, *cualquiera que sea* a.

(IV) *Elemento opuesto para la suma: para cada real* a, *hay un número real, que denotamos por* $-a$, *tal que* $a + (-a) = 0$.

Axiomas 1.12 (del producto)**.**

(V) *Propiedad asociativa del producto:* $(ab)c = a(bc)$.

(VI) *Propiedad conmutativa del producto:* $ab = ba$.

(VII) *Elemento neutro (o identidad) para el producto: hay un número real distinto de* 0, *que denotamos por* 1, *tal que* $a \cdot 1 = a$, *cualquiera que sea* a.

(VIII) *Elemento inverso para el producto: si* $a \neq 0$, *hay un número real, que denotamos por* a^{-1} *o* $\frac{1}{a}$, *tal que* $aa^{-1} = 1$.

Axioma 1.13 (Relación de suma y producto)**.**

(IX) *Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:* $a(b + c) = ab + ac$.

Consecuencias de las propiedades básicas

Proposición 1.14.

(I) *Si* $a + c = b + c$, *entonces* $a = b$. *(Ley de Cancelación).*

(II) *Si* $a + b = a$, *entonces* $b = 0$. *En consecuencia, en el conjunto de los reales hay un único elemento nulo.*

(III) *Si* $a + b = 0$, *entonces* $b = -a$. *En consecuencia, cada número real tiene un único opuesto.*

Proposición 1.15.

(I) *Si* $ac = bc$, *y* $c \neq 0$, *entonces* $a = b$. *(Ley de Cancelación)*

(II) *Si* $ab = a$ *y* $a \neq 0$, *entonces* $b = 1$. *Por tanto, en el conjunto de los reales hay un único elemento identidad.*

(I) $a \cdot 0 = 0$. *(Se dice que* 0 *es un elemento absorbente).*

(II) *Si* $ab = 0$ *entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$.

(III) $-a = (-1)a$.

(IV) $(-1)(-a) = a$. *Por tanto,* $-(-a) = a$. *(Ley de Idempotencia).*

(V) $(-a)(-b) = ab$.

(VI) *Si* $a \neq 0$, *entonces* $1/a \neq 0$ *y* $1/(1/a) = a$. *(Ley de Idempotencia)*

Abreviaturas

- $a - b := a + (-b)$, $\quad \frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$,
- $a + b + c := (a + b) + c = a + (b + c)$, $\quad abc := (ab)c = a(bc)$,
- $a^2 := aa$, $\quad a^3 := aaa$, $\quad \ldots$
- $2a := a + a$, $\quad 3a := a + a + a$, $\quad \ldots$

2.2. Desigualdades fundamentales en $\mathbb{R}$

Propiedades básicas del orden

Axiomas 1.17.

(X) *Propiedad reflexiva:* $a \leqslant a$.

(XI) *Propiedad antisimétrica: Si* $a \leqslant b$ *y* $b \leqslant a$ *entonces* $a = b$.

(XII) *Propiedad transitiva: Si* $a \leqslant b$ *y* $b \leqslant c$ *entonces* $a \leqslant c$.

(XIII) *Propiedad de orden total: Siempre es* $a \leqslant b$ *o* $b \leqslant a$.

Desigualdad estricta

Definición 1.18. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Decimos que $a < b$ (o que $b > a$) si $a \leqslant b$ y $a \neq b$.

Se prueba fácilmente la siguiente propiedad:

Teorema 1.19 (Ley de Tricotomía)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se da uno y solo uno de los siguientes casos:*

(I) $a < b$,

(II) $a = b$,

(III) $a > b$.

Consecuencias de las desigualdades básicas

Proposición 1.20.

(I) *Si $a \leqslant b$, $b < c$ entonces $a < c$.*

(II) *Si $a < b$, $b \leqslant c$ entonces $a < c$.*

(III) *Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.*

(IV) *Si $a \leqslant b$, $c \leqslant d$, entonces $a + c \leqslant b + d$, siendo entonces $a + c = b + d$ si y solo si $a = b$ y $c = d$.*

(V) *$a > 0$ si y solo si $-a < 0$.*

Proposición 1.21.

(I) *Si $a > 0$, $b > 0$, entonces $ab > 0$.*

(II) *Si $a > 0$, $b < 0$, entonces $ab < 0$.*

(III) *Si $a < 0$, $b < 0$, entonces $ab > 0$.*

(IV) *Cualquiera que sea a, es $a^2 \geqslant 0$. Se tiene $a^2 = 0$ si y solo si $a = 0$.*

(V) *$1 > 0$ y $-1 < 0$.*

(II) *Si* $a < b$, $c < 0$, *entonces* $ac > bc$.

(III) *Si* $a \leqslant b$, $c \leqslant 0$, *entonces* $ac \geqslant bc$.

Proposición 1.23.

(I) *Si* $0 \leqslant a \leqslant b$, *entonces* $a^2 \leqslant b^2$.

(II) *Si* $0 \leqslant a < b$, *entonces* $a^2 < b^2$.

Proposición 1.24.

(I) *Si* $a > 0$ *entonces* $\frac{1}{a} > 0$. *Si* $a < 0$ *entonces* $\frac{1}{a} < 0$.

(II) *Si* $0 < a < b$ *entonces* $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

(III) *Si* $a < b < 0$ *entonces* $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

2.3. Valor absoluto de un número real. Desigualdades básicas

Valor absoluto y distancia

Definición 1.25. El *valor absoluto* de un número real a es el número real no negativo

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{si } a \leqslant 0. \end{cases}$$

Definición 1.26. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se llama *distancia* entre a y b al número real no negativo $|a - b|$.

Propiedades del valor absoluto

Proposición 1.27.

(I) $|a| \geqslant 0$.

(II) $|a| = 0$ *si y solo si* $a = 0$.

(III) $|-a| = |a|$.

Proposición 1.28.

(I) $|ab| = |a||b|$.

(II) $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$.

(III) $a^2 \leqslant b^2$ *si y solo si* $|a| \leqslant |b|$.

(IV) $a^2 = b^2$ *si y solo si* $|a| = |b|$.

Desigualdad triangular

Teorema 1.29 (Desigualdad Triangular)**.** *Si a y b son números reales cualesquiera,*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Ejemplos. A veces la desigualdad anterior es una igualdad, y otras veces es una desigualdad estricta.

- $|3 + 5| = 8 = |3| + |5|$.
- $|-3 + 5| = 2 < 8 = |-3| + |5|$.

Teorema 1.30 (Desigualdad Triangular Inversa)**.** *Si a y b son números reales cualesquiera,*

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|.$$

2.4. Conjuntos acotados en $\mathbb{R}$. El Axioma del Supremo

Cotas superiores e inferiores. Conjuntos acotados

Definición 1.31. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$.

(I) Si a es un número real y $a \leqslant s$ para todo $s \in S$, decimos que a es una *cota inferior* de S y que S está *acotado inferiormente* (por a).

Máximo y mínimo

Definición 1.32. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$.

(I) Un número real m se dice que es un *mínimo* de S si pertenece a él y es una cota inferior de este, es decir, si $m \in S$ y $m \leqslant s$ para todo $s \in S$. Se escribe entonces $m = \text{mín}\, S$.

(II) Un número real M se dice que es un *máximo* de S si pertenece a él y es una cota superior de este, es decir, si $M \in S$ y $M \geqslant s$ para todo $s \in S$. Se escribe entonces $M = \text{máx}\, S$.

Los máximos y mínimos son únicos

Proposición 1.33. *Si un conjunto de números reales tiene máximo, entonces este máximo es único.*

Proposición 1.34. *Si un conjunto de números reales tiene mínimo, entonces este mínimo es único.*

Ínfimo y supremo

En los ejemplos vistos anteriormente, nos aparecían algunos puntos especiales, parecidos a máximos y mínimos, pero que sin embargo se ajustaban a la definición de estos últimos. Introducimos ahora un concepto que sí sirve para ellos.

Definición 1.35. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$.

(I) Un número real a se dice que es el *ínfimo* de S si es la mayor cota inferior de S. En este caso se escribe $a = \text{ínf}\, S$.

(II) Un número real b se dice que es el *supremo* de S si es la menor cota superior de S. En este caso se escribe $a = \sup S$.

Los ínfimos y supremos son únicos

Proposición 1.36. *Si un conjunto de números reales tiene supremo, entonces este*

Máximo y supremo

Proposición 1.38. *Sea S un conjunto de números reales. Entonces, $b \in \mathbb{R}$ es el máximo de S si, y solo si, es su supremo y además $b \in S$.*

Proposición 1.39. *Sea S un conjunto de números reales. Entonces, $a \in \mathbb{R}$ es el mínimo de S si y solo si es su ínfimo y además $a \in S$.*

Caracterización "ε" de supremos e ínfimos

Proposición 1.40 (Caracterización "ε" del supremo)**.** *Sea S un conjunto de números reales. Entonces $b \in \mathbb{R}$ es el supremo de S si, y solo si, verifican las dos siguientes condiciones:*

(I) *b es cota superior de S.*

(II) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $s \in S$ tal que $s > b - \varepsilon$.*

Proposición 1.41 (Caracterización "ε" del ínfimo)**.** *Sea S un conjunto de números reales. Entonces $a \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de S si, y solo si, verifican las dos siguientes condiciones:*

(I) *a es cota inferior de S.*

(II) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $s \in S$ tal que $s < a + \varepsilon$.*

El supremo no funciona bien en los racionales

La Propiedad del Supremo de los reales

Esta es de hecho la propiedad clave que diferencia a los reales de los racionales. Se cumple en el primero de estos conjuntos, y no se cumple en el otro, como acabamos de ver. De momento, fijaremos esta propiedad como el último de nuestros axiomas para los reales.

Axioma 1.42 (Propiedad del Supremo, o de Completitud)**.**

(XVI) *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.*

Proposición 1.43. *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo.*

2.5 Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$. Consecuencias

Otros enunciados de la Propiedad Arquimediana

Teorema 1.45. *Dados un número real b, existe algún número natural n tal que $n > b$.*

Teorema 1.46. *Los números naturales no constituyen un conjunto acotado (en $\mathbb{R}$).*

Teorema 1.47. *Dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural n tal que $1/n < \varepsilon$.*

Parte entera de un número real

Teorema 1.48. *Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un número entero m (y uno solo), tal que*

$$m \leqslant x < m + 1.$$

Definición 1.49. Al número m del teorema anterior se le llama *parte entera* de x, y se denota con $[x]$.

Los racionales son densos

Teorema 1.50 (Densidad de los Racionales)**.** *Dados dos números reales a y b, con $a < b$, existe algún número racional r tal que $a < r < b$.*

2.6. Números irracionales

Los números irracionales

Definición 1.51. Los números reales que no son racionales se llaman *números irracionales*.

Teorema 1.52. *Sea p un número real no negativo y $n \in \mathbb{N}$. Existe al menos un numero real v tal que $v^n = p$.*

Corolario 1.53. *Existen números irracionales.*

2.7. Números algebraicos y trascendentes

Concepto de número algebraico

Definición 1.55. Se dice que un número real es *algebraico* si es un cero de un polinomio con coeficientes enteros. El conjunto de los números algebraicos se denota por $\mathbb{A}$.

Proposición 1.56. *Todo número racional es algebraico.*

Operaciones con números algebraicos

Teorema 1.57. *Sean α y β dos números algebraicos. Entonces*

(I) $\alpha + \beta$ *es algebraico.*

(II) $\alpha\beta$ *es algebraico.*

(III) $-\alpha$ *es algebraico.*

(IV) *Si* $\alpha \neq 0$ *entonces* $1/\alpha$ *es algebraico. En consecuencia,* β/α *es algebraico.*

(V) *Si* $\alpha > 0$ *y* $p \in \mathbb{N}$, *entonces* $\sqrt[p]{\alpha}$ *es algebraico.*

Los números algebraicos son numerables

Teorema 1.58 (de Cantor)**.** *El conjunto $\mathbb{A}$ de los números algebraicos es numerable.*

Números trascendentes

Definición 1.59. Se dice que un número real es *trascendente* si no es algebraico.

2.8. Intervalos en $\mathbb{R}$

Intervalos

Definición 1.60. Reciben el nombre de *intervalos* los subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos del siguiente modo (a y b son número reales cualesquiera):

(III) intervalo *acotado*, *abierto* por la izquierda y *cerrado* por la derecha: $(a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b \,\}$;

(IV) intervalo *acotado* y *cerrado*: $[a, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b \,\}$;

(V) intervalo *abierto*, *acotado inferiormente* pero *no superiormente*: $(a, \infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > a \,\}$;

(VI) intervalo *cerrado*, *acotado inferiormente* pero *no superiormente*: $[a, \infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a \,\}$;

(VII) intervalo *abierto*, *acotado superiormente* pero *no inferiormente*: $(-\infty, b) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < b \,\}$;

(VIII) intervalo *cerrado*, *acotado superiormente* pero *no inferiormente*: $(-\infty, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b \,\}$;

(IX) intervalo *no acotado* ni inferior ni superiormente: $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Caracterización de los intervalos

Proposición 1.61 (Propiedad de los Valores Intermedios)**.** *Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un intervalo si, y solo si, dados $x, y \in I$, cada $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant z \leqslant y$ también pertenece a I.*

El Teorema de los Intervalos Encajados

Teorema 1.62 (de los Intervalos Encajados, de Cantor)**.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado y acotado (no vacío). Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $I_{n+1} \subset I_n$. Entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ es no vacío. Si, además, el tamaño de los intervalos se puede hacer tan pequeño como se quiera, es decir, $\inf\{\, (b_n - a_n) \mid n \in \mathbb{N} \,\} = 0$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ consta exactamente de un punto.*